5D-Z

Lösungsskizze

Lineare Algebra II: Probeklausur

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2022

- **Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 6 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 10 Punkte zu erwerben.**
- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telefonjoker etc.) außer mechanischen Armbanduhren und Weckern zugelassen.
- Bitte prüfen Sie die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

  Name:
  Matrikelnr.:

  Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.
- Sie dürfen die einzelnen Blätter dieses Bogens zur Bearbeitung der Klausur trennen, solange Sie den folgenden Punkt beachten. Wenn Sie zusätzliche lose Seiten benötigen, geben Sie uns bitte ein Zeichen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben jeweils auf den dafür vorgesehenen Seiten. Machen Sie auf jeder losen Seite klar erkenntlich, welche Aufgabe Sie lösen. Niederschriften, die nicht klar zugeordnet sind, werden nicht korrigiert.
- Fragen können Sie nur schriftlich stellen. Geben Sie uns dazu ein Zeichen. Wenn wir Ihre Frage zulassen, werden wir sie laut vorlesen und beantworten.
- Bitte lassen Sie Ihre Klausur am Ende der Bearbeitungszeit an Ihrem Sitzplatz liegen. Sie können einzelne Klausurbögen mit „bitte nicht werten“ kennzeichnen, aber nicht mitnehmen. Die Klausuraufgaben werden wir veröffentlichen.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							/60

Aufgabe 1

Gegeben ist die folgende reelle Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Begründen Sie kurz, warum die assoziierte symmetrische Bilinearform β_A symmetrisch ist, und berechnen Sie

$$\beta_A(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahrens eine Basis von $\mathbb{R}^3$, in der β_A durch die Einheitsmatrix gegeben ist.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a) β_A ist symmetrisch, weil A symmetrisch ist ($A^T = A$).

$$\beta_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{6}}$$

(b) Beginne mit Standardbasis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$.

$$\underline{d}_1 := \frac{\underline{e}_1}{\sqrt{\beta_A(\underline{e}_1, \underline{e}_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \underline{e}_1 = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{c}_2 := \underline{e}_2 - \beta_A(\underline{e}_2, \underline{d}_1) \cdot \underline{d}_1$$

$$= \underline{e}_2 - \frac{1}{2} \cdot \beta_A(\underline{e}_2, \underline{e}_1) \cdot \underline{e}_1$$

$$= \underline{e}_2 + \frac{1}{2} \underline{e}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_A(\underline{c}_2,\underline{c}_2) = \begin{pmatrix} \frac12 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac12 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac12 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac32 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac32$$

$$\underline{d}_2 := \frac{\underline{c}_2}{\sqrt{\mathcal{B}_A(\underline{c}_2,\underline{c}_2)}} = \frac{\sqrt2}{\sqrt3}\cdot\begin{pmatrix} \frac12 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt2}{2\cdot\sqrt3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt2\cdot\sqrt3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{c}_3 := \underline{e}_3 - \mathcal{B}_A(\underline{e}_3,\underline{d}_1)\underline{d}_1 - \mathcal{B}_A(\underline{e}_3,\underline{d}_2)\underline{d}_2$$

$$= \underline{e}_3 - \frac12 \underbrace{\mathcal{B}_A(\underline{e}_3,\underline{e}_1)}_{0}\underline{e}_1 - \frac16\cdot\mathcal{B}_A\left(\underline{e}_3,\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac16\cdot\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac16\cdot\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac13\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac13\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_A(\underline{c}_3,\underline{c}_3) = \frac19\cdot\left[\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac19\cdot\left[\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{12}{9}$$

$$\underline{d}_3 = \frac{\underline{c}_3}{\sqrt{\mathcal{B}_A(\underline{c}_3,\underline{c}_3)}} = \frac{3}{\sqrt{12}}\cdot\frac13\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

Die Bilinearform $\mathcal{B}_A$ ist bezüglich der Basis $(\underline{d}_1,\underline{d}_2,\underline{d}_3)$ durch die Einheitsmatrix gegeben.

Aufgabe 2

(a) Geben Sie die Definition eines *euklidischen Rings* an.

(b) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler $c \in \mathbb{Z}$ der folgenden beiden ganzen Zahlen:

$$a := 235, b := 37$$

Sind die beiden Zahlen teilerfremd? Bestimmen Sie ferner ganze Zahlen p und q, sodass gilt: $pa + qb = c$.

(c) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler $C \in \mathbb{R}[X]$ der folgenden beiden reellen Polynome:

$$A := X^5 + X^4 - X^2 + 1, B := X^3 - 1$$

Sind die beiden Polynome teilerfremd? Bestimmen Sie reelle Polynome P und Q, sodass gilt: $PA + QB = C$.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a) [siehe Vorlesung, Def 13.9:]

Ein euklidischer Ring ist ein Integritätsring R, für den eine Abbildung

$$\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$$

mit folgender Eigenschaft existiert:

Für alle $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existieren $q, r \in R$ mit $a = q \cdot b + r$ und ($r = 0$ oder $\delta(r) < \delta(b)$).

(b)

(1) $235 = \underbrace{6 \cdot 37}_{\substack{= 180 + 42 \\ = 222}} + 13$

(2) $37 = 2 \cdot 13 + 11$

(3) $13 = 1 \cdot 11 + 2$

(4) $11 = 5 \cdot 2 + 1$

(5) $2 = 2 \cdot 1 + 0$

An (4) können wir ablesen: $\underline{\underline{ggT(a,b) \sim 1.}}$

Also sind a, b teilerfremd.

Aus (1) folgt: $13 = a - 6 \cdot b$.

Aus (2) folgt: $11 = b - 2 \cdot 13$

$= b - 2(a - 6 \cdot b)$

$= -2a + 13b$

Aus (3) folgt: $2 = 13 - 11$

$= (a - 6b) - (-2a + 13b)$

$= 3a - 19b$

Aus (4) folgt: $1 = 11 - 5 \cdot 2$

$= (-2a + 13b) - 5 \cdot (3a - 19b)$

$= -2a + 13b - 15a + 95b$

$= -17a + 108b$

Wir können also $\underline{\underline{p = -17}}$ und $\underline{\underline{q = 108}}$ wählen.

(c) $A : B = (x^5 + x^4 - x^2 + 1) : (x^3 - 1) = x^2 + x$

$$\begin{array}{l} -(x^5 - x^2) \\ \hline \quad x^4 - x^2 + 1 \\ \quad -(x^4 - x) \\ \hline \qquad x + 1 \end{array}$$

Das zeigt:

(1) $A = (x^2 + x) \cdot B + (x + 1)$.

$B : (x+1) = (x^3 - 1) : (x + 1) = x^2 - x + 1$

$$\begin{array}{l} -(x^3 + x^2) \\ \hline \quad -x^2 - 1 \\ \quad -(-x^2 - x) \\ \hline \qquad x - 1 \\ \qquad x + 1 \\ \hline \qquad -2 \end{array}$$

Das zeigt:

(2) $B = (x^2 - x + 1) \cdot (x + 1) - 2$

Ferner gilt:

(3) $X+1 = \left(-\frac{1}{2}(X+1)\right)\cdot(-2) + 0.$

-2 invertierbar in $\mathbb{R}[X]$

Aus (2) folgt also: $\underline{\underline{ggT(A,B) \sim -2}} \sim 1$

Also sind A und B teilerfremd.

Aus (1) folgt:

$$X+1 = A - (X^2+X)\cdot B.$$

Aus (2) folgt:

$$\begin{aligned} -2 &= B - (X^2-X+1)(X+1) \\ &= B - (X^2-X+1)(A-(X^2+X)\cdot B) \\ &= B - (X^2-X+1)\cdot A + (X^2-X+1)(X^2+X)\cdot B \\ &= -(X^2-X+1)\cdot A + (X^4-X^3+X^2+X^3-X^2+X+1)\cdot B \\ &= (-X^2+X-1)\cdot A + (X^4+X+1)\cdot B \end{aligned}$$

Also können wir $\underline{\underline{P = -X^2+X-1}}$

und $\underline{\underline{Q = X^4+X+1}}$ wählen.

Aufgabe 2
(Seite 9)

Aufgabe 3

(a) Definieren Sie wahlweise das Minimalpolynom einer Matrix oder das Minimalpolynom eines Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.

(b) Berechnen Sie zu jeder der folgenden reellen Matrizen das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Geben Sie zu jeder Matrix in (b) an, ob eine Jordannormalform über $\mathbb{R}$ existiert, und geben Sie gegebenenfalls auch eine solche Jordannormalform an.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a) [siehe Vorlesung, Def. 14.4:]

Das Minimalpolynom eines Endomorphismus f eines endlich-dim. K-Vektorraums V ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$, für das gilt:

(M1) $\mu_f(f) = 0$ (Nullabbildung $\in \mathrm{End}_K(V)$)

(M2) Unter allen Polynomen $\neq 0$, die (M1) erfüllen, hat μ_f minimalen Grad.

(M3) μ_f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient $= 1$)

(b) $\chi_A = (7-X)(3-X) + 4 = X^2 - 10X + 25 = \underline{\underline{(X-5)^2}}$

Es ist $A - 5 \cdot \mathbb{1}_2 \neq 0$, also ist $\underline{\underline{\mu_A = \chi_A}}$.

$$\chi_B = (3-x)(1-x)+8 = \underline{\underline{x^2-4x+11}}$$

Nullstellen von χ_B sind gegeben durch

$$2 \pm \sqrt{2^2-11} = 2 \pm \sqrt{-5},$$

also hat χ_B keine reellen Nullstellen.

Somit ist χ_B irreduzibel.

Es folgt: $\underline{\underline{\mu_B = \chi_B}}$.

$$\chi_C = \det\begin{pmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ 5 & -1-x & 3 \\ 2 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = (-1-x)\cdot\det\begin{pmatrix} -1-x & 3 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$= (-1-x)^2\cdot(1-x)$$

$$= \underline{\underline{-(x+1)^2\cdot(x-1)}}$$

Es ist $C - \mathbb{1}_3 \neq 0$ und $C + \mathbb{1}_3 \neq 0$,

$$(C-\mathbb{1}_3)(C+\mathbb{1}_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -10 & \dots & \dots \\ & \dots & \end{pmatrix} \neq 0$$

$$(C+\mathbb{1}_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \dots & \\ & \dots & \\ & \dots & \end{pmatrix} \neq 0$$

Also ist $\underline{\underline{\mu_C = -\chi_C = (x+1)^2(x-1)}}$

(c) A hat JNF $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}}$.

B hat <u>keine</u> JNF über $\mathbb{R}$, da χ_B über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren zerfällt.

C hat JNF $\underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$.

Aufgabe 4
Gegeben ist die folgende reelle Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_A und das Minimalpolynom μ_A von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(c) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert a den Hauptraum $\mathrm{Hau}(A; a)$.

(d) Bestimmen Sie eine Jordanbasis von $\mathbb{R}^n$ für A. Geben Sie ferner die zugehörige Jordannormalform $\hat{A}$ von A an.

(e) Berechnen Sie A^{100} mit Hilfe der Jordanbasis und der Jordannormalform.
(Sie müssen hohe Potenzen reeller Zahlen in ihrer Antwort nicht ausmultiplizieren.)

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a) $\chi_A = \det\begin{pmatrix} 3-X & 0 & 1 \\ -3 & 3-X & 0 \\ 0 & 0 & 3-X \end{pmatrix}$

$= (3-X) \cdot \det\begin{pmatrix} 3-X & 0 \\ -3 & 3-X \end{pmatrix}$ (Entwicklung nach 3. Zeile)

$= \underline{\underline{(3-X)^3}}$

Es folgt:

$$\mu_A = \begin{cases} X-3 \\ \text{oder } (X-3)^2 \\ \text{oder } (X-3)^3 \end{cases}$$

$(A - 3 \cdot \mathbb{1}) \neq 0$

$(A-3\cdot\mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$

Also gilt:

$\mu_A = \underline{\underline{(X-3)^3}}$

(b) Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von χ_A. Also ist 3 der einzige Eigenwert von A.

(c) $\mathrm{Hau}(A;3) = \ker\left((A-3\cdot 1\!\!1)^3\right) = \ker(0) = \mathbb{R}^3$

(d)
$$\ker\left((A-3\cdot 1\!\!1)^2\right) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$\ker(A-3\cdot 1\!\!1) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Wähle U_3 mit $\ker\left((A-3\cdot 1\!\!1)^3\right) = \ker\left((A-3\cdot 1\!\!1)^2\right) \oplus U_3$,

also $\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus U_3$,

also z. B. $U_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Es ist $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von U_3 und aus Dimensionsgründen ist

$$\left((A-3\cdot 1\!\!1)^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (A-3\cdot 1\!\!1)\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
$$= \underline{\underline{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Dies ist die gesuchte Jordanbasis.

Die zugehörige JNF von A ist

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(e) $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

J^{-1}: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \Big| \cdot \frac{(-1)}{3}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \underline{\underline{J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$

$$\hat{A}^{100} = \Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\hat{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{N}}\Bigg)^{100} \quad (\text{wobei } \hat{D}\hat{N} = \hat{N}\hat{D})$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{100} + 100 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{99} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \binom{100}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{98} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$= 3^{98} \cdot \left[\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + 100 \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\binom{100}{2}}_{\substack{\frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2} \\ = 50 \cdot 99 \\ = 4950}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= 3^{98} \begin{pmatrix} 9 & 300 & 4950 \\ 0 & 9 & 300 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Es ist $A = J \hat{A} J^{-1}$

$$\left[NR: \quad \begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^3 \arrow[u, equal] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, equal] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[u, "J"] \arrow[r, "\hat{A}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd} \right]$$

Also ist $A^{100} = J \cdot \hat{A}^{100} \cdot J^{-1}$

$$= 3^{98} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 300 & 4950 \\ 0 & 9 & 300 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3^{98} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 & -3 & 4950 \\ 9 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= 3^{98} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 300 \\ -900 & 9 & -3 \cdot 4950 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= 3^{99} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 100 \\ -300 & 3 & -4950 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

Kreuzen Sie in den folgenden sieben Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Ein Endomorphismus f eines endlich-dimensionalen Vektorraums V ist genau dann diagonalisierbar, wenn gilt:

☐ Das Minimalpolynom von f zerfällt in Linearfaktoren.

☒ Das charakteristische Polynom von f zerfällt in Linearfaktoren, und die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts ist gleich seiner algebraischen Vielfachheit.

☒ V zerfällt in eine direkte Summe von Eigenräumen von f.

(2) Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V. Ist a ein Eigenwert von f mit **algebraischer Vielfachheit** m, so gilt:

☒ Das charakteristische Polynom χ_f hat die Form $\chi_f(X) = (X - a)^m \cdot P(X)$, wobei P ein zu $X - a$ teilerfremdes Polynom ist.

☒ Der Eigenraum $\mathrm{Eig}(f; a)$ hat Dimension $\leq m$.

☐ $(f - a \cdot \mathrm{id})^m = 0$

(3) Welche der folgenden Matrizen definieren ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$?

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(4) Für eine **Isometrie** $f \colon V \to V$ eines euklidischen Vektorraums V mit Norm $\| - \|$ gilt:

☒ $\|f(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$ für alle $\mathbf{v} \in V$.

☐ $\|\mathbf{v}\| = 1$ für alle Eigenvektoren $\mathbf{v}$ von f.

☐ Je zwei Eigenvektoren von f stehen senkrecht zueinander.

(5) Für jede reelle symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ gilt:

☐ Alle Eigenwerte von A haben Betrag 1.

☒ Die durch A definierte lineare Abbildung $f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist selbstadjungiert (bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$).

☒ Die durch A definierte Bilinearform β_A auf $\mathbb{R}^n$ ist symmetrisch.

(6) Die folgenden Ringe sind Integritätsringe:

☐ $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$
(Menge aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit punktweiser Addition und Multiplikation)

☐ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

☒ $\mathbb{Z}[\mathbf{i}] := \{a + b\mathbf{i} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$

(7) Sei V ein endlich-dimensionalre Vektorraum, U ein Untervektorraum, und $i \colon U \to V$ die Inklusion. Für die Dualräume V^* und U^* gilt:

☐ $\dim(U^*) = \dim V - \dim U$

☐ $\dim(U^*) = \dim(V)$ und $\dim(U) = \dim(V^*)$.

☒ Die Abbildung $i^* \colon V^* \to U^*$ ist surjektiv.

Aufgabe 5
(Seite 19)

Aufgabe 6
Sei $(V, \langle -,- \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum.

(a) Definieren Sie, wann eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ eine *Isometrie* ist.

(b) Definieren Sie, wann eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ *selbstadjungiert* ist.

(c) Zeigen Sie, dass für jede beliebige lineare Abbildung $f\colon V \to V$ eine eindeutige lineare Abbildung $f^\sharp\colon V \to V$ existiert, sodass für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ gilt:

$$\langle f^\sharp(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, f(\mathbf{w}) \rangle$$

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a) [Vgl. Vorlesung, Def. 11.1:]
Eine Isometrie auf V ist eine lineare Abb.
$f: V \longrightarrow V$, für die gilt:
$$\langle f(\underline{v}), f(\underline{w}) \rangle = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \qquad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$$

(b) [Vgl. Vorlesung, Def. 12.1:]
Ein Endomorphismus f von $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$
ist selbstadjungiert, falls
$$\langle f(\underline{v}), \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, f(\underline{w}) \rangle \qquad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

(c) Option A:
Satz aus Vorlesung: Jeder endlich-dim. eukl. VR besitzt eine ON-Basis.
Wähle also eine ON-Basis $B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ von V. Dann ist
$$f(\underline{b}_i) = \sum_{j=1}^n m_{ji} \underline{b}_j$$
für gewisse Koeffizienten $m_{ji} \in \mathbb{R}$.
[äquivalent: ${}_B M_B(f) = (m_{ij})_{ij}$.]

Ansatz: $$f^{\#}(\underline{b}_i) = \sum_{j=1}^{n} m^{\#}_{ji}\, \underline{b}_j$$
für gewisse Koeffizienten $m^{\#}_{ji}$.

Hat $f^{\#}$ die angegebene Eigenschaft, so gilt für alle i und k:

$$\langle f^{\#}(\underline{b}_i), \underline{b}_k\rangle = \langle \underline{b}_i, f(\underline{b}_k)\rangle,$$

also $$\langle \textstyle\sum_j m^{\#}_{ji}\underline{b}_j, \underline{b}_k\rangle = \langle \underline{b}_i, \textstyle\sum_\ell m_{\ell k}\underline{b}_\ell\rangle,$$

also $$\sum_j m^{\#}_{ji} \underbrace{\langle \underline{b}_j, \underline{b}_k\rangle}_{\delta_{jk}} = \sum_\ell m_{\ell k} \underbrace{\langle \underline{b}_i, \underline{b}_\ell\rangle}_{\delta_{i\ell}},$$

also $$m^{\#}_{ki} = m_{ik}.$$

Da $f^{\#}$ als lineare Abbildung eindeutig durch die Koeffizienten $m^{\#}_{ki}$ festgelegt ist, zeigt dies die Eindeutigkeit von $f^{\#}$.

Definieren wir andererseits $f^{\#}$ durch
$$f^{\#}(\underline{b}_i) := \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, \underline{b}_j$$
[äquivalent: ${}_B M_B(f^{\#}) = {}_B M_B(f)^T$],
so zeigt dieselbe Rechnung wie oben, dass $f^{\#}$ die geforderte Eigenschaft besitzt.

Option B:

Nach Vorlesung ist für jeden euklidischen VR $(V, \langle -,- \rangle)$ durch

$$\begin{aligned} \imath : V &\longrightarrow V^* \\ \underline{v} &\longmapsto \langle \underline{v}, - \rangle \end{aligned}$$

ein Isomorphismus gegeben. Die Bedingung an $f^\#$ lautet:

$$\imath(f^\#(\underline{v})) = \imath(\underline{v}) \circ f \quad \text{für alle } \underline{v} \in V,$$

oder äquivalent:

$$\imath \circ f^\# = f^* \circ \imath$$

Dies ist äquivalent zu:

$$f^\# = \imath^{-1} \circ f^* \circ \imath$$

Hieraus folgen Eindeutigkeit und Existenz von $f^\#$.